(**学術論文**) **日本経営数学会誌**, Vol.25, No.1, pp.28-40,2003.

ファジィ論理関数と菅野積分の関係について

Fuzzy Switching Functions and Sugeno Integrals

高 萩 栄 一 郎*
Eiichiro TAKAHAGI

Abstract: In this paper, we demonstrate that fuzzy switching functions with constants (Fuzzy/C in short) are represented as Sugeno integral models. First, monotone Fuzzy/C of $f(0,\ldots,0) = 0$, weighted max-min functions and Sugeno integral models are transferable each others. Next, monotone Fuzzy/C can be represented as Sugeno integral models with $\mu(\emptyset) \in [0,1]$. Lastly, we show that Fuzzy/C can be represented as Sugeno integral models whose input are extended to 2 lines that are true inputs and false inputs.

Keywords (**キーワード**): Fuzzy switching function (ファジィ論理関数), Sugeno integral (菅野積分), Fuzzy/C(定数係数を持ったファジィ論理関数)

1 はじめに

最近の研究により,(定数係数を持った）ファジィ論理関数 [3] と Choquet 積分，菅野積分などのファジィ積分の間にさまざまな関係があることがわかってきている．高萩ら [4] は，単調な定数係数を持ったファジィ論理関数と菅野積分は，相互に変換できることを示し，また，Marichal[5] は，菅野積分を Weighted Max-Min Function として扱うことができることを示し，その数学的な性質を議論している．

本稿では，単調な定数係数を持ったファジィ論理関数のみならず，一般の定数係数を持ったファジィ論理関数が（若干拡張した）菅野積分で表現できることを示す．

ファジィ積分とファジィ論理関数の関数の関係を明らかにすることにより，図 1 のように，ファジィ論理関数とファジィ積分の理論を相互に利用することができる．

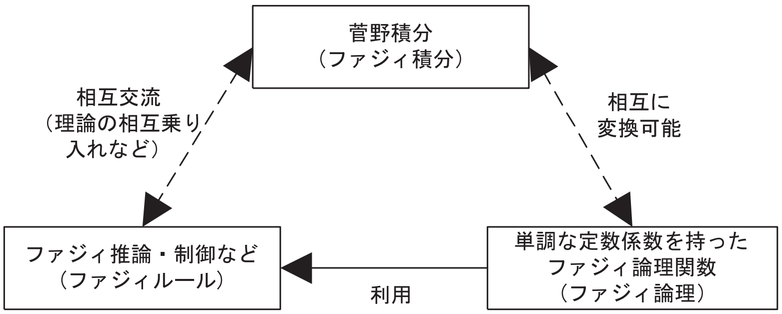

図 1: ファジィ論理関数とファジィ積分の関係

*専修大学 (Senshu University)
受付：2002 年 10 月 22 日，受理：2003 年 3 月 26 日

2　記号

2.1　定数係数を持ったファジィ論理関数

定数係数を持ったファジィ論理関数 [3]（以下 Fuzzy/C）f は，論理変数 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, と論理積 $(\wedge)$（省略することがある），論理和 $(\vee)$，否定 $(\neg)$，定数係数からなる関数である．演算は，$\wedge$ に min，$\vee$ に max，$\neg x$ に $1 - x$ 演算を割り当てる．それぞれの使い方は，一般的な Fuzzy/C([3] など) に従う．Fuzzy/C の例としては，

$$f(x_1, x_2) = (0.7x_1) \vee (0.3\neg x_1 x_2) \vee (0.6\neg x_1 \neg x_2) \vee 0.1 \tag{1}$$

をあげる．0.7 などは定数係数であり，0.1 を定数項と呼ぶ.

任意のファジィ論理関数は，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_1$ を積項とすると，ファジィ加法形式

$$F = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_m \tag{2}$$

で表すことができる [2]．ただし，α_i には，$\neg x_i$ などの否定項や $x_i \neg x_i$ などの相補項を含む．Fuzzy/C の定数係数は，論理変数と同様に演算できるので，任意の Fuzzy/C は，$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, c_i \in [0, 1]$ を定数係数とすると，

$$F = c_0 \vee c_1\alpha_1 \vee c_2\alpha_2 \vee \ldots \vee c_m\alpha_m \tag{3}$$

と表現できる．ただし，c_0 は，積項が係らない係数定数 – 定数項 – である，

Fuzzy/C f の単調性を次式のように，入出力値間の単調性と定義する．

$$x_i^1 \leq x_i^2, \forall i \text{ ならば } f(x_1^1, \ldots, x_n^1) \leq f(x_1^2, \ldots, x_n^2) \tag{4}$$

2.2　Weighted Max-Min Function

$X = \{1, \ldots, n\}$ を入力変数の添え字の集合とする．Weighted Max-Min Function f は，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{T \subseteq X} [a_T \wedge (\bigwedge_{i \in T} x_i)] \tag{5}$$

(ただし，$a_T \in [0, 1]$ かつ $a_\emptyset = 0$) で定義される．したがって，Weighted Max-Min Function は，積項に否定 $\neg$ を含まず，$c_0 = 0$ の場合の Fuzzy/C の加法形式 (式 (3)) に一致する．したがって，Fuzzy/C は，Weighted Max-Min Function より広い概念である．

2.3　ファジィ測度，ファジィ積分

ファジィ測度 μ を

$$\mu : 2^X \to [0, 1] \tag{6}$$

$$\mu(\emptyset) = 0 \tag{7}$$

$$A \subseteq B \subseteq X \text{ ならば}, \mu(A) \leq \mu(B) \tag{8}$$

で定義する．式 (7) を「空集合の 0 制約」，式 (8) を「ファジィ測度の単調性制約」と呼ぶ.「空集合の 0 制約」は，以下の章で定義から外すことがある．

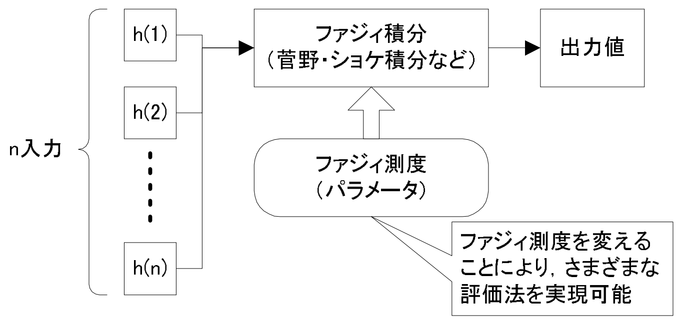

図 2: ファジィ積分

ファジィ積分（菅野積分やショケ積分など）は，図 2 のように，n 入力 1 出力の関数である．ファジィ積分はファジィ測度 μ を取り替えることによりさまざまな評価法を表現できる．

$h(1),\ldots,h(n),h(i)\in[0,1]$ を入力変数とすると，菅野積分の定義は，

$$(\mathrm{S})\int hd\mu \equiv \max_{r\in[0,1]}\min[r,\mu(\{x;h(x)>r\})] \tag{9}$$

で定義される．

$n=3, X=\{1,2,3\}$ の場合の例を示す．まず，X の部分集合すべてにファジィ測度 μ を割り当てる．たとえば，$\mu(\emptyset)=0, \mu(\{1\})=0.2, \mu(\{2\})=0.3, \mu(\{3\})=0.1, \mu(\{1,2\})=0.4, \mu(\{1,3\})=0.2,$ $\mu(\{2,3\})=0.7, \mu(\{1,2,3\})=1.0$ とする．各ファジィ測度の意味は，たとえば，$\mu(\{2\})$ は，入力 2 単独の出力値への効果，$\mu(\{1,3\})$ は，入力 1 と 3 が合わさった場合の効果，$\mu(\{1,2,3\})$ は，入力 1,2,3 が合わさった場合 (全体) の効果という意味がある．

次に，入力値を $h(1),h(2),h(3)$ のように表す．$h(1)=0.4,h(2)=0.8,h(3)=0.2$ の場合の菅野積分値は，

$$\begin{aligned}(\mathrm{S})\int hd\mu &= [h(2)\wedge\mu(\{2\})]\vee[h(1)\wedge\mu(\{1,2\})]\vee[h(3)\wedge\mu(\{1,2,3\})] \\ &= [0.8\wedge 0.3]\vee[0.4\wedge 0.4]\vee[0.2\wedge 1.0]=0.4\end{aligned} \tag{10}$$

となる．菅野積分では，まず，入力値を大きい順，$h(2)\geq h(1)\geq h(3)$ に並べかえる．$h(2)$ 以上の入力は $h(2)$ のみであるので，式 (10) の 1 項は，$h(2)$ と $\mu(\{2\})$ の小さい方，$h(2)\wedge\mu(\{2\})$ とする．$h(1)$ 以上の入力は $h(1)$ と $h(2)$ であるので，式 (10) の 2 項は，$h(1)$ と $\mu(\{1,2\})$ の小さい方，$h(1)\wedge\mu(\{1,2\})$ とする．同様に 3 項は，$h(3)$ 以上の入力は，すべてであるので $\mu(\{1,2,3\})$ との最小値をとる．これら 3 つの最小値をとったものの最大値が菅野積分値となる．

$h(1)=0.4,h(2)=0.2,h(3)=0.8$ の場合の菅野積分は，$h(3)\geq h(1)\geq h(2)$ となることから

$$\begin{aligned}(\mathrm{S})\int hd\mu &= [h(3)\wedge\mu(\{3\})]\vee[h(1)\wedge\mu(\{1,3\})]\vee[h(2)\wedge\mu(\{1,2,3\})] \\ &= [0.8\wedge 0.1]\vee[0.4\wedge 0.2]\vee[0.2\wedge 1.0]=0.2\end{aligned} \tag{11}$$

となる．

ショケ積分は，

$$(\mathrm{C})\int hd\mu \quad\equiv\quad \int_0^1 \mu(\{x;h(x)>r\})dr \tag{12}$$

で定義される．菅野積分と同じファジィ測度を用い，$h(1) = 0.4, h(2) = 0.8, h(3) = 0.2$ の場合のショケ積分値は,

$$\begin{aligned}
&\text{(C)} \int h d\mu = [h(2) - h(1)]\mu(\{2\}) + [h(1) - h(3)]\mu(\{1,2\}) + [h(3) - 0]\mu(\{1,2,3\}) \quad (13)\\
= &\quad [0.8 - 0.4]0.3 + [0.4 - 0.2]0.4 + [0.2 - 0]1.0 = 0.4
\end{aligned}$$

となる．ショケ積分の場合，$h(2)$ と $h(1)$ の間の部分 $h(2) - h(1)$ は，入力 2 単独なので，2 単独の効果 $\mu(\{2\})$ をかけ，$h(1)$ と $h(3)$ の間，$h(1) - h(3)$ は，1,2 の効果 $\mu(\{1,2\})$，$h(3) - 0$ は，すべての効果 $\mu(\{1,2,3\})$ をかけ，その合計がショケ積分値になる．

3 単調なファジィ論理関数と菅野積分

3.1 定数項なしの場合 ($c_0 = 0$ の場合)

f が単調な定数係数を持ったファジィ論理関数であり，定数項を持たない場合 ($c_0 = 0$ の場合)，すなわち $f(0, \ldots, 0) = 0$ の場合，f は菅野積分で表現できる（証明は付録）．ファジィ測度 μ を

$$\begin{aligned}
\mu(A) = f(x_1, \ldots, x_n) \quad &, \quad \forall A \in 2^X \setminus \emptyset \quad (14)\\
x_i = 1 \quad &\text{if} \quad i \in A\\
x_i = 0 \quad &\text{if} \quad i \notin A\\
\mu(\emptyset) = 0 &
\end{aligned}$$

で割り当てれば，次式のように一致する．

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \quad \text{(S)} \int h d\mu, h(i) = x_i, x_i \in [0,1], \forall i \quad (15)$$

Weighted Max-Min Function は，積項に否定 $\neg$ を含まないので単調であり，$f(0, \ldots, 0) = 0$ であるので，Weighted Max-Min Function は，本節のケースにあてはまり，Marichal[5] の「菅野積分を Weighted Max-Min Function として扱うことができる」ことに一致する．

3.2 数値例

数値例として，

$$f(x_1, x_2) = 0.2x_1 \vee 0.4x_2 \vee 0.8x_1x_2 \quad (16)$$

をあげる．この場合，

$$\begin{aligned}
\mu(\emptyset) = &\quad f(0,0) = \quad 0\\
\mu(\{1\}) = &\quad f(1,0) = \quad 0.2\\
\mu(\{2\}) = &\quad f(0,1) = \quad 0.4\\
\mu(\{1,2\}) = &\quad f(1,1) = \quad 0.8 \quad (17)
\end{aligned}$$

となる．例えば，$x_1 = 0.6, x_2 = 0.8$ の場合，Fuzzy/C の計算 (式 16) では，$f(0.6, 0.8) = (0.2 \wedge 0.6) \vee (0.4 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 0.6 \wedge 0.8) = 0.6$ となり，式 (17) での菅野積分を使った場合，$h(1) = 0.6, h(2) = 0.8$

であるので

$$\begin{aligned}
&\text{(S)}\int hd\mu \\
&\quad (h(2) \geq h(1)\ \text{であるので}) \\
&= h(2) \wedge \mu(\{2\}) \vee h(1) \wedge \mu(\{1,2\}) \\
&= 0.8 \wedge 0.4 \vee 0.6 \wedge 0.8 = 0.6
\end{aligned} \tag{18}$$

となる．

3.3 論理式が加法形式の場合

Fuzzy/C がファジィ加法標準形式 [2] で，論理関数に否定 (¬) と定数 c_0 が現れない場合，簡易な方法でファジィ測度を求めることができる．

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1\alpha_1 \vee c_2\alpha_2 \vee \ldots \vee c_m\alpha_m \tag{19}$$

で，積項 α_j の論理変数の添字の集合を A_j とする．たとえば，$\alpha_j = x_2x_3x_5$ ならば，$A_j = \{2, 3, 5\}$ である．

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{j=1,\ldots,m} (c_j \wedge (\bigwedge_{k \in A_j} x_k)) \tag{20}$$

とすると，まず，

$$\mu'(A_j) = c_j \quad , \quad j = 1, \ldots, m \tag{21}$$

$$\mu'(B) = 0 \quad , \quad \forall B \in (2^X \setminus \{A_1, \ldots, A_m\}) \tag{22}$$

とし，

$$\mu(A) = \max_{B \subseteq A} \mu'(B), \forall A \in 2^X \tag{23}$$

で割り当てる．例えば，

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.2x_1 \vee 0.3x_2 \vee 0.7x_1x_3 \tag{24}$$

の場合，式 (21) より，

$$\mu'(\{1\}) = \quad 0.2 \tag{25}$$

$$\mu'(\{2\}) = \quad 0.3 \tag{26}$$

$$\mu'(\{1, 3\}) = \quad 0.7 \tag{27}$$

となり，式 (22) より，

$$\mu'(\emptyset) = \mu'(\{3\}) = \mu'(\{1, 2\}) = \mu'(\{2, 3\}) = \mu'(\{1, 2, 3\}) = 0 \tag{28}$$

となる．次に，式 (23) を適用して，

$$
\begin{aligned}
\mu(\emptyset) &= \mu'(\emptyset) && = 0\\
\mu(\{1\}) &= \max[\mu'(\emptyset), \mu'(\{1\})] && = 0.2\\
\mu(\{2\}) &= \max[\mu'(\emptyset), \mu'(\{2\})] && = 0.3\\
\mu(\{3\}) &= \max[\mu'(\emptyset), \mu'(\{3\})] && = 0\\
\mu(\{1,2\}) &= \max[\mu'(\emptyset), \mu'(\{1\}), \mu'(\{2\}), \mu'(\{1,2\})] && = 0.3\\
\mu(\{1,3\}) &= \max[\mu'(\emptyset), \mu'(\{1\}), \mu'(\{3\}), \mu'(\{1,3\})] && = 0.7\\
\mu(\{2,3\}) &= \max[\mu'(\emptyset), \mu'(\{2\}), \mu'(\{3\}), \mu'(\{2,3\})] && = 0.3\\
\mu(\{1,2,3\}) &= \max[\mu'(\emptyset), \mu'(\{1\}), \mu'(\{2\}), \mu'(\{3\}), \mu'(\{1,2\}), \mu'(\{1,3\}), \mu'(\{2,3\})] && = 0.7
\end{aligned}
$$

となる．

3.4 菅野積分のファジィ論理関数表示

菅野積分を定数係数を持ったファジィ論理関数で表現するには，次のようにする．

$$\text{(S)} \int h d\mu = \bigvee_{A \in \{A; A \subseteq 2^X\}} (\mu(A) \wedge (\bigwedge_{k \in A} x_k)), x_i = h(i), \forall i \tag{29}$$

3.5 ファジィ論理関数の場合

定数係数を持たない，一般のファジィ論理関数は，2 値 (0 または 1) の入力に対して，2 値の出力を行う．したがって，一般の単調なファジィ論理関数が，$f(0,\ldots,0) = 0$ であれば，式 (14) の方法で割り当てたファジィ測度も 2 値の値からなり，

$$\mu(A) \in \{0, 1\}, \forall A \in 2^X \tag{30}$$

となる．2 値のファジィ測度の場合のファジィ積分結果は，菅野積分，ショケ積分でともに同じである [1] ので，

$$\text{(C)} \int h d\mu = \text{(S)} \int h d\mu = f(x_1, \ldots, x_n), \forall x_i \in [0, 1] \tag{31}$$

である（ただし，f は定数項を持たず，$f(0,\ldots,0) = 0$).

4 定数項を持つ場合

定数項を持つ場合，すなわち $C = f(0,\ldots,0) > 0$ の場合，式 (14) で求めたファジィ測度を使えば，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{(S)} \int h d\mu \vee C, h(i) = x_i, \forall i \tag{32}$$

となる．定数項 C を菅野積分の内部に取り込むには，ファジィ測度を拡張しなくてはならない．すなわち，空集合の 0 制約を弛め，式 (14) のファジィ測度の割り当て方法を変更する．すなわち，

$\mu(\emptyset)=0$ を外し，他の集合のファジィ測度の値と同様に，$\mu(\emptyset)\in[0,1]$ とする．空集合のファジィ測度の求め方は,

$$\mu(\emptyset)=C=f(0,\ldots,0) \tag{33}$$

とする．菅野積分の定義は，式 (9) をそのまま使う．その場合,

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\text{(S)}\int hd\mu, h(i)=x_i,\forall i \tag{34}$$

となる（証明は付録）.

菅野積分の定義式 (9) では，$\max$ をとる r の範囲が，$[0,1]$ であるため，$\mu(\emptyset)>0$ でも，積分値が無限大になることはない.

したがって，任意の Fuzzy/C は,（拡張した）ファジィ測度菅野積分モデルで表現できる．§3.3 や §3.4 の場合も同様である.

例えば,

$$f(x_1,x_2)=0.4x_1\vee 0.6x_2\vee 0.3 \tag{35}$$

の場合，対応するファジィ測度 μ は,

$$\mu(\emptyset)=0.3,\mu(\{1\})=0.4,\mu(\{2\})=0.6,\mu(\{1,2\})=0.6 \tag{36}$$

となり，$x_1=h(1)=0.1$,$x_2=h(2)=0.2$ の場合の菅野積分値は,

$$\begin{aligned}\text{(S)}\int hd\mu &= \mu(\emptyset)\vee(h(2)\wedge\mu(\{2\}))\vee(h(1)\mu(\{1,2\}))\\ &=0.3\vee(0.2\wedge 0.6)\vee(0.1\wedge 0.6)=0.3\end{aligned}$$

となる.

5 (非単調な) ファジィ論理関数と菅野積分

5.1 2 線式での表現

非単調なファジィ論理関数の場合，図 3 のように，1 つの入力（論理変数）を真の入力，負の入力の 2 つに分けること (2 線式での表現) により，菅野積分で表現することができる.

まず，Fuzzy/C をファジィ加法形式に変換する．次に，$\neg$ が係らない論理変数 x_i を x_i^T に，$\neg$ が係る論理変数 $\neg x_i$ を x_i^F で置き直し，x_i^T と x_i^F を別々の論理変数として見た Fuzzy/C を g とおく.

$$g:[0,1]^{2n}\to[0,1] \tag{37}$$

f から g への変換方法は複数ある場合があるが，その場合，任意の変換方法とする．g は，x_i^T と x_i^F を別々の論理変数と見るので，$x_i^T+x_i^F=1$ とはならない入力値を与えることも可能である．また，g は，否定 ($\neg$) を含まないので単調な Fuzzy/C である.

また，$x_i^T=x_i$,$x_i^F=1-x_i$ とすれば，f から g への変換方法より，明らかに,

$$g(x_1^T,\ldots,x_n^T,x_1^F,\ldots,x_n^F)=f(x_1,\ldots,x_n),\quad x_i^T=x_i,x_i^F=1-x_i,\forall x_i\in[0,1] \tag{38}$$

である.

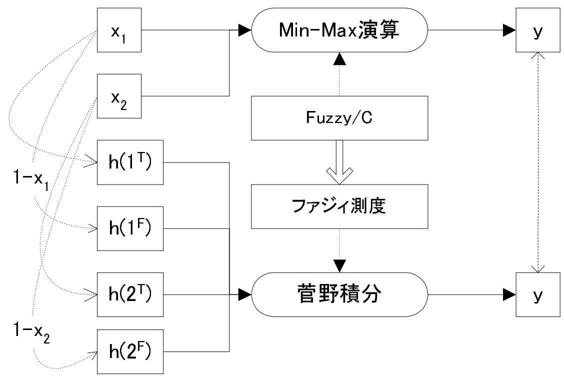

図 3: 非単調なファジィ論理関数と菅野積分

g は，(x_i^T と x_i^F を別々の変数と見れば，) 単調な Fuzzy/C であるので，§4 の方法を使えば，(拡張した) ファジィ測度菅野積分モデルで表現できる．すなわち，

$$X^* = \{1^T, \ldots, n^T, 1^F, \ldots, n^F\} \tag{39}$$

$$\mu^* : 2^{X^*} \to [0,1] \tag{40}$$

とし，

$$\mu^*(A) = g(x_1^T, \ldots, x_n^T, x_1^F, \ldots, x_n^F), \forall A \in 2^{X^*} \tag{41}$$
$$x_i^T = 1 \text{ if } i^T \in A\ ,\ x_i^F = 1 \text{ if } i^F \in A$$
$$x_i^T = 0 \text{ if } i^T \notin A\ ,\ x_i^F = 0 \text{ if } i^F \notin A$$

でファジィ測度の値を割り当てれば，

$$g(x_1^T, \ldots, x_n^T, x_1^F, \ldots, x_n^F) = \text{(S)} \int h^* d\mu^*$$
$$\forall x_i^T \in [0,1], \forall x_i^F \in [0,1], h^*(i^T) = x_i^T, h^*(i^F) = x_i^F, \forall i$$

である．また，式 (38) より，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{(S)} \int h^* d\mu^* \tag{42}$$
$$h^*(i^T) = x_i, h^*(i^F) = 1 - x_i, \forall x_i \in [0,1]$$

となり，非単調な Fuzzy/C も菅野積分で表現できる．

5.2 数値例

式 (1) を例に示す．式 (1) の最初の積項 $0.7x_1$ は，x_1 に否定 $\neg$ が付かないので，$0.7x_1^T$ となり，2 番目の積項は，x_1 に否定 $\neg$ が付くので，$0.3x_1^F x_2^T$ となり，同様に 3 番目の積項は $0.6x_1^F x_2^F$ となる．したがって，式 (1) を 2 線式で表現すると

$$g(x_1^T, x_2^T, x_1^F, x_2^F) = (0.7x_1^T) \vee (0.3x_1^F x_2^T) \vee (0.6x_1^F x_2^F) \vee 0.1 \tag{43}$$

表 1: 式 (43) のファジィ測度

$\mu^*(\emptyset)$	$= g(0,0,0,0)$	$= 0.1$	$\mu^*(\{1^T\})$	$= g(1,0,0,0)$	$= 0.7$
$\mu^*(\{2^T\})$	$= g(0,1,0,0)$	$= 0.1$	$\mu^*(\{1^F\})$	$= g(0,0,1,0)$	$= 0.1$
$\mu^*(\{2^F\})$	$= g(0,0,0,1)$	$= 0.1$	$\mu^*(\{1^T, 2^T\})$	$= g(1,1,0,0)$	$= 0.7$
$\mu^*(\{1^T, 1^F\})$	$= g(1,0,1,0)$	$= 0.7$	$\mu^*(\{1^T, 2^F\})$	$= g(1,0,0,1)$	$= 0.7$
$\mu^*(\{2^T, 1^F\})$	$= g(0,1,1,0)$	$= 0.3$	$\mu^*(\{2^T, 2^F\})$	$= g(0,1,0,1)$	$= 0.1$
$\mu^*(\{1^F, 2^F\})$	$= g(0,0,1,1)$	$= 0.6$	$\mu^*(\{1^T, 2^T, 1^F\})$	$= g(1,1,1,0)$	$= 0.7$
$\mu^*(\{1^T, 2^T, 2^F\})$	$= g(1,1,0,1)$	$= 0.7$	$\mu^*(\{1^T, 1^F, 2^F\})$	$= g(1,0,1,1)$	$= 0.7$
$\mu^*(\{2^T, 1^T, 1^F\})$	$= g(0,1,1,1)$	$= 0.6$	$\mu^*(\{1^T, 2^T, 1^F, 1^F\})$	$= g(1,1,1,1)$	$= 0.7$

となる．この場合の μ^* を計算すると，表 1 のようになる．

$x_1 = 0.3$,$x_2 = 0.8$ の場合，$h^*(1^T) = 0.3, h^*(1^F) = 1 - 0.3 = 0.7$,$h^*(2^T) = 0.8, h^*(2^F) = 1 - 0.8 = 0.2$ となるので，$h^*(2^T) \geq h^*(1^F) \geq h^*(1^T) \geq h^*(2^F)$ より，

$$
\begin{aligned}
\text{(S)} \int h^* d\mu^* =& \mu^*(\emptyset) \vee h^*(2^T) \wedge \mu^*(\{2^T\}) \vee h^*(1^F) \vee \mu^*(\{2^T, 1^F\}) \\
& h^*(1^T) \wedge \mu^*(\{1^T, 2^T, 1^F\}) \vee h^*(2^F) \wedge \mu^*(\{1^T, 2^T, 1^F, 2^F\}) \\
=& 0.1 \vee 0.8 \wedge 0.1 \vee 0.7 \wedge 0.3 \vee 0.3 \wedge 0.7 \vee 0.2 \wedge 0.7 = 0.3
\end{aligned}
$$

となる．

6 おわりに

Fuzzy/C と菅野積分の関係を示した．図 4 は，その関係を示したものであり，次のことを明らかにした．

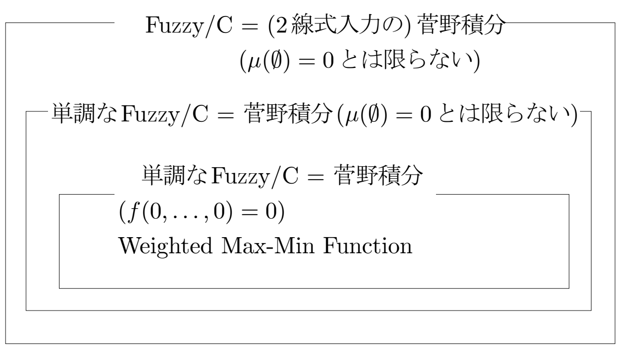

図 4: さまざまなファジィ論理関数と菅野積分の関係

- 任意の Weighted Max-Min Function および 任意の $f(0, \ldots, 0) = 0$ となる単調な Fuzzy/C は，菅野積分で表現できる．
- 任意の菅野積分は，単調な Fuzzy/C および Weighted Max-Min Function で表現できる．
- 任意の単調な Fuzzy/C は，ファジィ測度の空集合の 0 制約を外せば，菅野積分で表現できる．

- 任意の Fuzzy/C は，2 線式の入力にし，空集合の 0 制約を外せば，菅野積分で表現できる．

付録（証明）

補題 1 (否定を含まないファジィ加法形式での表現) 任意の単調な *Fuzzy/C*$f(x_1,\ldots,x_n)$ は，否定を含まない積項 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ と定数係数 $c_0,\ldots,c_m,c_i\in[0,1]$ で，

$$f(x_1,\ldots,x_n)=c_0\vee c_1\alpha_1\vee c_2\alpha_2\vee\ldots\vee c_m\alpha_m \tag{44}$$

と表現できる．

（証明）
任意のファジィ論理関数は，ファジィ加法形式で表現できる [2] ので，任意の単調なファジィ論理関数を

$$f(x_1,\ldots,x_n)=c_0\vee c_1\beta_1\vee c_2\beta_2\vee\ldots\vee c_m\beta_k \tag{45}$$

で表す．ただし，β_i は積項で否定 $\neg$ を含むこともあるとする．各 $c_i\beta_i$ で，どのような $x_1,\ldots,x_n,x_i\in[0,1]$ の組み合わせに対しても，c_0,$c_1\beta_1$,…,$c_k\beta_k$ の中で最大値にならないものは，式 (45) に必要ではないので，そのような積項を消去する．

式 (45) のうち残った積項で，$\neg$ を含む β_i を考える．ある $x_1,\ldots,x_n$ の組み合わせで，その $c_i\beta_i$ は，c_0,$c_1\beta_1$,…,$c_k\beta_k$ の中で最大値になる．$\neg$ が係る x_j について，最大値になる範囲内の $(x_1,\ldots,x_n)$ で，$\partial f(x_1,\ldots,x_n)/\partial x_j<0$ であることは，f が単調増加であることに違反するので，あり得ない．したがって，$c_i\beta_i$ が最大値である $(x_1,\ldots,x_n)$ の範囲で，$\partial f(x_1,\ldots,x_n)/\partial x_j\geq 0$ であり，β_i は積項であるので，β_i の $\neg x_j$ を 1 に置き換えても，$f(x_1,\ldots,x_n)$ は同じ Fuzzy/C である．

したがって，$\neg x_j$ をすべて取り払うことができ，

$$f(x_1,\ldots,x_n)=c_0\vee c_1\alpha_1\vee c_2\alpha_2\vee\ldots\vee c_m\alpha_m \tag{46}$$

と表すことができる．
（証明終）

定理 1 (単調な Fuzzy/C の菅野積分表示) 任意の単調な *Fuzzy/C* は，拡張したファジィ測度による菅野積分で表現できる．

（証明）
補題 1 により，任意の単調な Fuzzy/C は，否定を含まない積項 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ と定数係数 $c_0,\ldots.c_m,c_i\in[0,1]$ で，

$$f(x_1,\ldots,x_n)=c_0\vee c_1\alpha_1\vee c_2\alpha_2\vee\ldots\vee c_m\alpha_m \tag{47}$$

と表現でき，各積項を 1 つの Fuzzy/C，p^i で表す．

$$p^i(x_1,\ldots,x_n)=c_i\alpha_i, i=0,\ldots,m \tag{48}$$

とする (ただし，$\alpha_0=1$)．したがって，$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{i=0}^m p^i(x_1,\ldots,x_n)$ である．また，各 p^i は明らかに，すべての x_i に対して，単調増加関数である．

任意の $x_1,\ldots,x_n$ に対して，式 (14) で割り当てたファジィ測度を使い，$f(x_1,\ldots,x_n) = (\mathrm{S})\int h d\mu$ になることを示す．説明が容易になるように，$x_1 \geq \ldots \geq x_n$ となるように，x_i の順番を入れ替える．また，$h(i) = x_i$ とする．

$h^j(i)$ を，

$$h^j(i) = \begin{cases} h(i) & i \leq j \text{ の場合} \\ 0 & i > j \text{ の場合} \end{cases} \tag{49}$$

で定義する．次の順番で証明する．

(1) $f(0,\ldots,0) = (\mathrm{S})\int h^0 d\mu$ である．これは，$\mu(\emptyset) = f(0,\ldots,0)$ であることから明らかである．

(2)

$$f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) = (\mathrm{S})\int h^k d\mu \tag{50}$$

ならば,

$$f(x_1,\ldots,x_{k+1},0,\ldots,0) = (\mathrm{S})\int h^{k+1} d\mu \tag{51}$$

であることを示す.

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\ldots,x_{k+1},0,\ldots,0) \\
&\quad f \text{ の単調増加性より} \\
=&f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \vee f(x_1,\ldots,x_{k+1},0,\ldots,0) \\
=&[\bigvee_{i=0}^{m} p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)] \vee [\bigvee_{i=0}^{m} p^i(x_1,\ldots,x_{k+1},0,\ldots,0)] \\
=&\bigvee_{i=0}^{m} [p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \vee p^i(x_1,\ldots,x_{k+1},0,\ldots,0)]
\end{aligned} \tag{52}$$

となる．$p^i(\alpha_i)$ が x_{k+1} を含む積項であれば,

$$\begin{aligned}
&p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \vee p^i(x_1,\ldots,x_{k+1},0,\ldots,0) \\
=&p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \vee [x_{k+1} \wedge p^i(x_1,\ldots,x_k,1,0,\ldots,0)] \\
&\quad x_1,\ldots,x_k \geq x_{k+1} \text{ および } p^i \text{ は否定を含まない積項であることより} \\
=&p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \vee x_{k+1} \wedge p^i(\overbrace{1,\ldots,1}^{k+1},0,\ldots,0)
\end{aligned} \tag{53}$$

となる．式 (52) の $p^i(\alpha_i)$ が x_{k+1} を含まない積項であれば,

$$\begin{aligned}
&p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \vee p^i(x_1,\ldots,x_{k+1},0,\ldots,0) \\
=&p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \vee p^i(x_1,\ldots,x_k,1,0,\ldots,0) \\
&\quad (p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) = p^i(x_1,\ldots,x_k,1,0,\ldots,0) \text{ より}) \\
=&p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \vee [x_{k+1} \wedge p^i(x_1,\ldots,x_k,1,0,\ldots,0)] \\
&\quad x_1,\ldots,x_k \geq x_{k+1} \text{ および } p^i \text{ は否定を含まない積項であることより} \\
=&p^i(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \vee [x_{k+1} \wedge p^i(\overbrace{1,\ldots,1}^{k+1},0,\ldots,0)]
\end{aligned} \tag{54}$$

となる．したがって，式 (53) と式 (54) より，式 (52) は，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,\dots,x_{k+1},0,\dots,0)\\
=&\bigvee_{i=0}^{m}[p^i(x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)\vee[x_{k+1}\wedge p^i(\overbrace{1,\dots,1}^{k+1},0,\dots,0)]\\
=&\bigvee_{i=0}^{m}[p^i(x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)]\vee[x_{k+1}\wedge \bigvee_{i=0}^{m}p^i(\overbrace{1,\dots,1}^{k+1},0,\dots,0)]\\
=&\text{(S)}\int h^k d\mu\vee[x_{k+1}\wedge f(\overbrace{1,\dots,1}^{k+1},0,\dots,0)]\\
=&\text{(S)}\int h^k d\mu\vee[x_{k+1}\wedge \mu(\{1,\dots,k+1\})]\\
=&\text{(S)}\int h^{k+1} d\mu
\end{aligned}
$$

$h=h^n$ より，(S) $\int h^n d\mu=$ (S) $\int hd\mu$ であるので，(S) $\int hd\mu=f(x_1,\dots,x_n)$ である．

（証明終）

定理 2 (空集合の 0 制約を外した場合の菅野積分) f を単調な *Fuzzy/C* とし，

$$
\begin{aligned}
\mu(A)=\mu^+(A)=f(x_1,\dots,x_n)\quad &,\quad \forall A\in 2^X\setminus\emptyset\\
x_i=1\quad &\text{if}\quad i\in A\\
x_i=0\quad &\text{if}\quad i\notin A\\
\mu(\emptyset)=0, C=\mu^+(\emptyset)=f(0,\dots,0)&
\end{aligned}
\tag{55}
$$

とすると，

$$
\text{(S)}\int hd\mu\vee C=\text{(S)}\int hd\mu^+,\forall h(i)\in[0,1],i=1,\dots,n \tag{56}
$$

である．

（証明）

$$
\begin{aligned}
&\text{(S)}\int hd\mu^+\\
=&\max_{r\in[0,1]}\min[r,\mu^+(\{x;h(x)>r\})]\\
&\text{ファジィ測度 }\mu^+\text{ の単調性より}\\
=&\max_{r\in[\mu^+(\emptyset),1]}\min[r,\mu^+(\{x;h(x)>r\})]\vee\mu^+(\emptyset)\\
=&\max_{r\in[C,1]}\min[r,\mu(\{x;h(x)>r\})]\vee C\\
=&\max_{r\in[0,1]}\min[r,\mu(\{x;h(x)>r\})]\vee C\\
=&\text{(S)}\int hd\mu\vee C
\end{aligned}
$$

（証明終）

謝辞

本研究の一部は，平成 13 年度専修大学研究助成（個別研究）「ファジィ積分とファジィ論理関数の関係について」および平成 14 年度専修大学研究助成（個別研究）「論理型ファジィ積分とその応用」の研究成果である．ここに感謝する．

参考文献

[1] 菅野道夫, 室伏俊明:「ファジィ測度 (講座ファジィ 3)」, 日刊工業新聞社,1993.

[2] 向殿政男:「ファジィ論理 (講座ファジィ 4)」, 日刊工業新聞社,1993.

[3] 荒木智行, 向殿政男: 定数係数をもったファジー論理関数について，電子情報通信学会論文誌,D-I, Vol.J81-D-I NO.9, pp1037-1047,1998.

[4] TAKAHAGI,E and ARAKI,T: On fuzzy Integral representation in fuzzy switching functions with constants, Proc. VJFUZZY'98, pp.240-245,1998.

[5] Marichal, J.-L.: On Sugeno integral as an aggregation function, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.114, 2000, pp.347-365.

[6] TAKAHAGI,E: On Fuzzy integral representation in fuzzy switching functions,fuzzy rules and fuzzy control rules, IFSA'99, Vol.1, pp.289-293, Taipei,1999.

高萩　栄一郎
専修大学商学部
〒 214-8580 川崎市多摩区東三田 2–1–1
E-mail: takahagi@isc.senshu-u.ac.jp